Cijepanje, ramifikacija, ...

Def. 6. Neka je K/F proširenje polja. Kažemo da se kvaternionska algebra H/F **cijepa** nad K ako $H \otimes_F K \simeq M_2(K)$.

(Ako je $H = \left(\frac{a,b}{F}\right)$ onda je $H \otimes_F K = \left(\frac{a,b}{K}\right)$.)

Kažemo da se H **cijepa**, ako se cijepa nad F.

Teorem 6. nam daje jednostavan kriterij cijepanja:

(e) $ax^2+by^2=1$ ima rješenje u $K \times K$

(f) Ako je $E = F(\sqrt{b})$, onda $a \in N_{E/F}(E)$

Korolar 1. Ako je F alg. zatvoreno polje, onda se svaka kv. algebra cijepa nad F. (Jer, npr., jednadžba $ax^2+by^2=1$ ima rješenje.)

Primjer 4 Neka je $p \equiv 3\ (4)$ prost broj. Tada jednadžba $-x^2+py^2=1$ nema racionalnih rješenja (jer je $\left(\frac{-1}{p}\right)=1$), pa se kvaternionska algebra $\left(\frac{-1,p}{\mathbb{Q}}\right)$ ne cijepa. Slično, algebra $\left(\frac{-1,p}{\mathbb{Q}}\right)$ se cijepa za $p \equiv 1\ (4)$.

Propozicija 2. Neka je H kvaternionska algebra nad F.

Ako je E potpolje od H koje je kvadratno proširenje od F, onda se H cijepa nad E.

Dokaz: Neka je $\{1, i, j, k\}$ standardna baza za H gdje je $E = F(i)$ i $i^2 = a \in F$ (zašto takva baza postoji?). Tada je $H = \left(\frac{a, b}{F}\right)$ (gdje je $j^2 = b$). Vrijedi $H \otimes E = \left(\frac{a, b}{E}\right) \underset{\substack{\uparrow \\ \text{zašto?}}}{\simeq} \left(\frac{1, b}{E}\right)$

pa je $H \otimes_F E \simeq M_2(E)$.

$\blacksquare$

Kako razmišljati o kvaternionskim algebrama? Kvadratni prostori

Neka je H kv. algebra nad F. Norma je kvadratna forma na H, tj. vrijedi

(i) $\mathrm{nr}(\alpha x) = \alpha^2 \mathrm{nr}(x) \quad \forall \alpha \in F, \forall x \in H$

(ii) funkcija $B : H \times H \to H$ definiranu s

$$B(x,y) := \frac{1}{2}\left(\mathrm{nr}(x+y) - \mathrm{nr}(x) - \mathrm{nr}(y)\right) = \frac{1}{2}\mathrm{tr}(x\bar{y})$$

je simetrična bilinearna forma na H.

Def. 7. Kvadratni prostor nad F je par (V, Q) gdje je V k.d. vekt. prostor nad F i $Q : V \to F$ zadovoljava:

(a) $Q(ax) = a^2 Q(x) \quad \forall a \in F, x \in V$

(b) $B(x,y) = \frac{1}{2}\left(Q(x+y) - Q(x) - Q(y) \right)$ je simetrična bilinearna forma na V.

Napomena: $B(x,x) = Q(x) \quad \forall x \in V$

- $Q(v) = 0$, kažemo da je V izotropan, inače anizotropan

  V je izotropan ako sadrži izotropan vektor

- $X \perp Y \iff B(x,y) = 0 \quad \forall x \in X$ i $\forall y \in Y$.

  kažemo da su X i Y ortogonalni

• V je nedegeneriran ako $V^\perp = \{0\}$.

Teorem 7. Svaki kvadratni prostor ima ortogonalnu bazu.

Što su izomorfizmi u kategoriji kvadratnih prostora? Izometrije

Def. 8. Neka su (V, Q) i (V', Q') kvadratni prostori nad F.
Linearno preslikavanje $\sigma: V \to V'$ je izometrija ako

(a) σ je izomorfizam

(b) $Q'(\sigma(x)) = Q(x)$ $\forall x \in V$.

Norma Neka je H kv. algebra nad F. Reducirana norma je kvadratno preslikavanje na H. Ako je $\{1, i, j, k\}$ standardna baza za $H = \left(\frac{a,b}{F}\right)$, onda

$$nr(x + yi + zj + wk) = x^2 - ay^2 - bz^2 + abw^2$$

te je $\{1, i, j, k\}$ ortog. baza za H. Kako je $ab \neq 0$, H je nedegeniran.

Potprostor čistih kvaterniona H_0 s reduciranom normom je nedegeniran 3-dim kvadratni prostor nad F.

Kako je $\forall x \in H_0$, $\bar{x} = -x$, za sve $x, y \in H$ vrijedi

$$nr(x) = -x^2 \quad \text{i} \quad B(x,y) = -\frac{1}{2}(xy + yx)$$

Teorem 8 Neka su H i H' kvaternionske algebre nad $\mathbb{H}$.

$H \simeq H'$ ako i samo ako $H_0 \simeq H_0'$

izomorfizam algebri

izomorfizam kvadratnih prostora

lakše je raditi s kvadratnim prostorima nego s algebrama

Dokaz: Neka su nr i nr' reducirane norme od H i H' redom.

Pretp. prvo da postoji izomorfizam algebri $\phi : H \to H'$. Neka je $0 \neq x \in H_0$. Tada $x \notin F$ i $x^2 \in F$. Slijedi $\phi(x) \notin F$ i $\phi(x)^2 = \phi(x^2) \in F$ pa je $\phi(x) \in H_0'$, odnosno $\phi : H_0 \to H_0'$ je izomorfizam vektorskih prostora.

Za svaki $x \in H_0$, $nr'(\phi(x)) = -\phi(x)^2 = \phi(-x^2) = \phi(nr(x)) = nr(x)$

pa su H_0 i H_0' izometrični.

Obratno, neka je $\sigma : H_0 \to H_0'$ izometrija. Neka je $\{1, i, j, k\}$ standardna baza za $H = \left(\frac{a, b}{F}\right)$

Budući da je $nr(i) = -i^2 = -a$, slijedi da je $\sigma(i)^2 = -nr'(\sigma(i)) = a$

i slično $\sigma(j)^2 = b$. Kako su elementi i i j ortogonalni u H_0

slijedi da su $\phi(i)$ i $\phi(j)$ ortog. u H_0' pa $0 = B(\phi(i), \phi(j)) \cdot 2 = \phi(i)\phi(j) - \phi(j)\phi(i)$

Lako se vidi da $\sigma(i)$ ne komutira s $\sigma(i)\sigma(j)$ pa $\sigma(i)\sigma(j) \notin F$,

ali $(\sigma(i)\sigma(j))^2 = -ab \in F$, odnosno $\sigma(i)\sigma(j) \in H_0'$.

Ako je $r\sigma(i) + s\sigma(j) + t\sigma(i)\sigma(j) = 0$ za neke $r, s, t \in F$ onda množeći

s lijeva s $\sigma(i)$ dobivamo $r \cdot a \in H_0 \Rightarrow r = 0$. Slično slijedi $s = t = 0$

$\Rightarrow \{1, \sigma(i), \sigma(j), \sigma(ij)\}$ je standardna baza za H' pa je $H' \cong \left(\frac{a,b}{F}\right)$. ∎

Kvaternionske algebre nad lokalnim poljima : $\mathbb{C}$, $\mathbb{R}$, $\mathbb{Q}_p$, ...

$$\boxed{\text{od ranije: } \left(\frac{a,b}{F}\right) \cong \left(\frac{ax^2, by^2}{F}\right) \text{ za sve } x,y,a,b \in F.}$$

- $\mathbb{C}$ – svaka k.a. se cijepa (svaki a (ili b) je kvadrat)
- $\mathbb{R}$ – jedine kvaternionske algebre su $\left(\frac{1,1}{\mathbb{R}}\right)$, $\left(\frac{1,-1}{\mathbb{R}}\right)$ i $\left(\frac{-1,-1}{\mathbb{R}}\right)$

  jer $\mathbb{R}^\times / \mathbb{R}^{\times 2} \cong \{-1, 1\}$.

izomorfne s $M_2(\mathbb{R})$

Hamiltonovi kvaternioni

- F p-adsko polje ; $\mathcal{O}$ prsten cijelih, uniformizator π, $\mathfrak{p} = \pi\mathcal{O}$ jedinstven maksimalan ideal, $\overline{F} = \mathcal{O}/\mathfrak{p}$ rezidualno prsten., v valuacija na F ← (1) $v(x) \geq 0$ $\forall x \in F$; $v(x) = 0 \iff x = 0$

  (2) $v(xy) = v(x)v(y)$ $\forall x, y \in F$

  (3) $v(x+y) \leq v(x) + v(y)$ $\forall x, y \in F$

  e.g. $F = \mathbb{Q}_p$; $v(x) = p^{-\mathrm{ord}_p x}$

- polje F ima jedinstveno neramificirajuće kvadratno proširenje $K = F(\sqrt{u})$

  ne razgranato

  gdje je $u \in \mathcal{O}^\times / \mathcal{O}^{\times 2}$ (tj. $v(u) = 1$)

Teorem 9 Do na izomorfizam $\left(\frac{u,\pi}{F}\right)$ je jedina divizijska kvaternionska algebra nad F.

Kako znamo da je $\left(\frac{u,\pi}{F}\right)$ divizijska algebra? Po Teoremu 6 dovoljno je pokazati $\pi \notin N_{K/F}(K^\times)$. No iz lokalne teorije polja klasa (local class field theory)

Teorem 10. Neka je K/F konačno abelovo proširenje lokalnih polja. Tada

$$[F^\times : N_{K/F}(K^\times)] = [K:F],$$

Korolar 2 Neka je K/F kvadratno proširenje p-adskih polja.

K/F je nerazgranato ako i samo ako $N_{K/F}(K^\times) = \mathcal{O}_F^\times$.

Natrag na $\left(\frac{\pi, u}{F}\right)$... $\pi \notin N_{K/F}(K^\times) = \mathcal{O}_F^\times$ pa slijedi da je algebra divizijska.

Kvaternionske algebre nad poljima algebarskih brojeva

- F # fld, $\mathcal{O} = \mathcal{O}_F$ prsten cijelih

Lokalno globalni princip

- valuacije u proširenjima

$$\begin{array}{c} K \\ | \\ F \end{array} \qquad \begin{array}{c} w \\ | \\ v \end{array} \qquad w \mid v \iff w|_F = v$$

valuacije

kažemo w je iznad v

$$K \hookrightarrow K_{\mathfrak{p}_i}$$

$$\mathfrak{p}_i \rightsquigarrow \qquad \rightsquigarrow v_{\mathfrak{p}_i}(x) = |\mathfrak{p}_i|^{-\operatorname{ord}_{\mathfrak{p}_i}(x)}$$

$$\begin{array}{ccc} \mathfrak{p}_1 & & \mathfrak{p}_r \\ & \backslash\,/\;/ & \\ & \mathfrak{p} & \end{array}$$

$$|\mathfrak{p}_i| = |\mathcal{O}_K / \mathfrak{p}_i|$$

Vanjski:

$$K \otimes_F F_v \simeq \prod_{w|v} K_w$$

$$\Rightarrow \quad N_{K/F}(a) = \prod_{w|v} N_{w/v}(a)$$

norma i trag proširenja K_w / F_v

$$w(x) = v\left(N_{w/v}(x)\right)^{\frac{1}{[K_w : F_v]}}$$

$$Tr_{K/F}(a) = \sum_{w|v} Tr_{w/v}(a)$$